

Mécanique générale

Dynamique : étude des états

par **Jean-Pierre BROSSARD**

Professeur de mécanique à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon

1. État d'équilibre statique	A 1 667 - 2
1.1 Définition de l'équilibre.....	— 2
1.1.1 Équilibre d'un point matériel	— 2
1.1.2 Équilibre d'un système matériel.....	— 2
1.2 Stabilité d'un équilibre	— 2
1.3 Statique par les théorèmes généraux.....	— 3
1.3.1 Équilibre d'un point matériel	— 3
1.3.2 Équilibre d'un système matériel.....	— 3
1.3.3 Équilibre d'un solide.....	— 3
1.3.4 Stabilité.....	— 4
1.4 Statique par les méthodes énergétiques.....	— 4
1.4.1 Position d'équilibre d'un système. Théorème de d'Alembert	— 4
1.4.2 Étude de l'équilibre et de la stabilité des systèmes à potentiel	— 5
1.5 Mouvement voisin d'une position d'équilibre stable	— 9
1.5.1 Conditions d'application de la théorie	— 10
1.5.2 Linéarisation des équations du mouvement.....	— 10
1.5.3 Écriture automatique des équations sous forme matricielle	— 11
1.5.4 Solution générale. Modes propres. Valeurs propres.....	— 11
1.5.5 Extension de la méthode aux systèmes dissipatifs à fonction dissipation	— 14
2. États stationnaires	— 17
2.1 État de mouvement. État stationnaire	— 17
2.2 Stabilité au sens de Liapounov	— 17
2.3 Écriture des équations.....	— 18
2.4 État stationnaire.....	— 18
2.5 Linéarisation.....	— 19
2.6 Stabilité du système linéaire associé.....	— 20
2.6.1 Solution	— 20
2.6.2 Nature des racines pour avoir stabilité	— 20
2.6.3 Critère de Routh.....	— 20
2.7 Stabilité du système réel non linéaire. Théorème de Liapounov.....	— 21

Les équations de la dynamique, obtenues par la méthode de Lagrange ou par les théorèmes généraux débarrassés des inconnues dynamiques, constituent un système différentiel du 2^e ordre. Ces équations peuvent être ramenées au premier ordre, résultat que l'on peut obtenir directement par la méthode d'Hamilton.

On appelle **état de mouvement** une solution connue de ce système différentiel.

La résolution des équations différentielles est un problème difficile. Fort heureusement, il y a deux états de mouvement remarquables très fréquents et relativement faciles à étudier :

- l'état d'équilibre ;
- l'état stationnaire.

Avec la notion d'état d'équilibre et d'état de mouvement va de paire la notion de **stabilité** de ces états. C'est aussi un des problèmes fondamentaux de la mécanique.

On trouvera application de ces résultats dans de très nombreux domaines, notamment :

- la mécanique céleste ;
- la commande des systèmes dynamiques ;
- l'aviation ;
- l'astronautique ;
- l'automobile ;
- les véhicules sur rail ;
- les ouvrages d'art.

Notons encore que la notion d'équilibre dépasse largement le cadre de la mécanique (biométrie, économétrie).

Cet article fait partie d'un ensemble d'articles traitant de la **Mécanique générale** ; le lecteur devra donc se reporter assez souvent aux développements mathématiques étudiés précédemment dans les articles :

- *Dynamique générale. Forme vectorielle* [A 1 664] ;
 - *Dynamique générale. Forme analytique* [A 1 666] ;
- de ce traité.

1. État d'équilibre statique

La notion d'**état de mouvement** sera précisée ultérieurement. Elle servira à généraliser certaines notions de cet article.

La **statique** est simplement la partie de la mécanique qui traite d'un cas très particulier, l'**absence de mouvement au repos**.

On pourrait la considérer comme un simple cas particulier, mais nous allons voir qu'elle nécessite des développements autonomes.

1.1 Définition de l'équilibre

Nous allons procéder comme dans les articles précédents, en partant du point matériel, puis en généralisant aux systèmes considérés comme ensemble de points matériels.

1.1.1 Équilibre d'un point matériel

Un point matériel P est dit en équilibre dans la position P* telle que $\vec{OP}^* = [x^*, y^*, z^*]$, si le système :

$$\begin{cases} \vec{dF} = \vec{Jg}(P)dm \\ \vec{dF} = \begin{bmatrix} x'' dm \\ y'' dm \\ z'' dm \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1)$$

admet seulement la solution :

$$\begin{cases} x = x^* \\ y = y^* ; t > t_0 \\ z = z^* \end{cases}$$

lorsqu'il est abandonné à l'instant $t = t_0$ avec les conditions :

$$\begin{cases} x_0 = x^* \\ y_0 = y^* \\ z_0 = z^* \end{cases} \quad \begin{cases} x'_0 = 0 \\ y'_0 = 0 \\ z'_0 = 0 \end{cases}$$

1.1.2 Équilibre d'un système matériel

Un système matériel (S) est dit en équilibre si tout point P appartenant à (S) est en équilibre.

Si la configuration est exprimée à l'aide de n paramètres, cela se traduit par le fait que les paramètres gardent tous une valeur constante :

$$q_i = \text{Cte} = q_i^* \quad \forall i$$

1.2 Stabilité d'un équilibre

Une position d'équilibre d'un système matériel est dite stable si, en écartant ce système **suffisamment peu** de cette position en lui communiquant des vitesses initiales **suffisamment faibles**, on peut être assuré que le système s'écarte **suffisamment peu** de sa position d'équilibre.

Par exemple, un pendule, lorsque la masse est sur la verticale, au-dessous du point de suspension, est en position d'équilibre stable ; légèrement écarté de la verticale, il reste dans le voisinage (figure 1).

Cependant, cette notion intuitive est totalement inutilisable pour édifier une théorie de stabilité.

Nous lui substituerons donc une notion mathématique, que l'on appelle **critère de stabilité**, et dont l'un des plus employés est le **critère de Liapounov**.

Soit un système dont la configuration s'exprime à l'aide de n paramètres q_1, \dots, q_n .

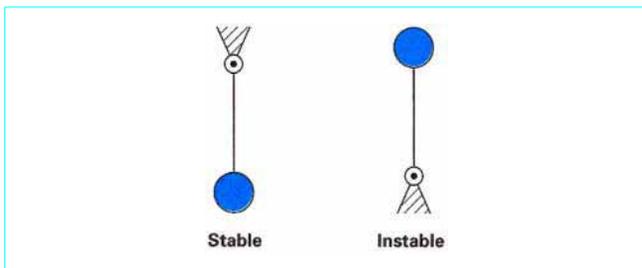


Figure 1 – Stabilité du pendule

Pour chaque paramètre, on peut définir ce que l'on appelle **écart** : $|q_i - q_i^*|$.

Si l'on a comme conditions initiales pour $t = 0$, $q_i = q_{i0}$, $q'_i = q'_{i0}$, l'écart initial est défini par : $|q_{i0} - q_i^*|$.

On dit que l'équilibre est stable au sens de Liapounov si, à tout nombre ε positif et arbitrairement petit, on peut faire correspondre λ et μ tels que :

$$\left. \begin{array}{l} |q_{i0} - q_i^*| < \mu \\ |q'_{i0}| < \lambda \end{array} \right\} \text{ pour } t = 0 \rightarrow |q_i(t) - q_i^*| < \varepsilon \text{ pour } t > 0$$

La notion de stabilité n'a de sens que si l'écart initial est raisonnable. Nous allons traiter des conditions de l'équilibre. Cela peut se faire, comme pour la dynamique, sous forme vectorielle ou sous forme analytique.

1.3 Statique par les théorèmes généraux

1.3.1 Équilibre d'un point matériel

■ **Condition nécessaire**

Par hypothèse, $x = x^* = x_0$; $x'_0 = 0$; $y = y^* = y_0$; $y'_0 = 0$; $z = z^* = z_0$; $z'_0 = 0$.

Les équations (1) donnent :

$$x'' = 0 ; \quad y'' = 0 ; \quad z'' = 0 \quad ; \quad \vec{dF} = 0$$

L'action qui agit sur le point matériel doit être nulle.

■ **Condition suffisante**

$$\text{Hypothèse : } \vec{dF} = 0 ; \quad \begin{cases} x'_0 = 0 \\ y'_0 = 0 \\ z'_0 = 0 \end{cases}$$

Le système différentiel donne :

$$\begin{array}{l} x'' = 0 \rightarrow x' = \text{Cte} = x'_0 = 0 \\ y'' = 0 \rightarrow y' = \text{Cte} = y'_0 = 0 \\ z'' = 0 \rightarrow z' = \text{Cte} = z'_0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = \text{Cte} \rightarrow x = x^* \\ y = \text{Cte} \rightarrow y = y^* \\ z = \text{Cte} \rightarrow z = z^* \end{array}$$

Théorème : une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point matériel abandonné sans vitesse initiale soit en équilibre est que la **somme géométrique des forces qui agissent sur lui soit nulle**.

1.3.2 Équilibre d'un système matériel

Le système est considéré comme formé d'un ensemble de points matériels. Pour chaque point matériel, on peut écrire (avec les notations des articles [A 1 664] et [A 1 666] de ce traité) :

$$\vec{dF}_e + \vec{dF}_i = \vec{0} ; \quad \int_{P \in S} \vec{dF}_e + \int_{P \in S} \vec{dF}_i = \vec{0}$$

mais $\int_{P \in S} \vec{dF}_i = \vec{0} ; \quad \vec{F}_{ex} = \vec{0}$

$$\vec{CP} \wedge \vec{dF}_e + \vec{CP} \wedge \vec{dF}_i = \vec{0} ; \quad \int_{P \in S} \vec{CP} \wedge \vec{dF}_e + \int_{P \in S} \vec{CP} \wedge \vec{dF}_i = \vec{0}$$

$$\int_{P \in S} \vec{CP} \wedge \vec{dF}_i = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{ex}(C) = \vec{0}$$

Théorème : pour qu'un système matériel soit en équilibre, il faut que le **torseur des forces extérieures soit nul**.

Attention ; cette condition n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple très simple suivant.

Exemple : les barres (1) et (2) forment un système plan analogue à un compas (figure 2). Appliquons un torseur formé de deux forces opposées : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.

Le torseur est nul mais il est évident que le système n'est pas en équilibre.

1.3.3 Équilibre d'un solide

Nous allons avec cette hypothèse établir une condition nécessaire et suffisante du fait de la propriété cinématique, caractéristique d'un solide.

■ **Forme cinématique de l'équilibre dans le cas du solide**

Rappelons qu'un système est en équilibre si, pour tout point P, on a :

$$\vec{OP} = \text{Cte} \quad \text{ou} \quad \vec{v}^g(P) = \vec{0}$$

Mais le champ de vitesse d'un solide est un **champ de moment** :

$$\vec{v}^g(P) = \vec{v}^g(G) + \vec{\Omega}_S^g \wedge \vec{GP}$$

Pour que le champ soit nul, il faut et il suffit que :

$$\vec{v}^g(G) = \vec{0} ; \quad \vec{\Omega}_S^g = \vec{0}$$

Ici, le point G ne joue aucun rôle particulier, comme il est connu en théorie des torseurs.

■ **Condition nécessaire de l'équilibre**

Le solide est à lui seul un système matériel. On peut lui appliquer le théorème précédent (§ 1.3.2). Si le système est en équilibre :

$$\vec{F}_{ex} = \vec{0} ; \quad \vec{M}_{ex}(G) = \vec{0}$$

■ **Condition suffisante de l'équilibre**

Supposons que, pour $t = 0$, on ait les conditions initiales $[\vec{v}^0(P)]_0 = \vec{0} \quad \forall P$.

Supposons en outre que, pour $t > 0$, $\vec{F}_{ex} = \vec{0} ; \quad \vec{M}_{ex}(G) = \vec{0}$, G étant le centre d'inertie du solide. Autrement, le solide est initialement au repos, et on lui applique constamment un torseur nul.

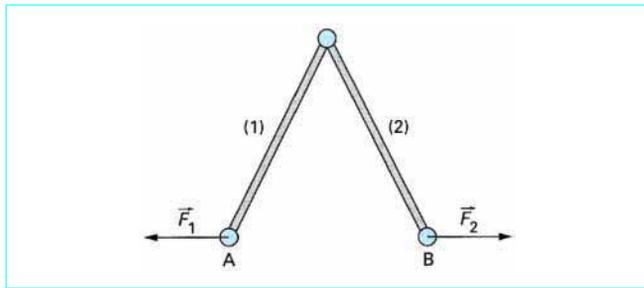


Figure 2 – Torseur nul sans équilibre

Une condition équivalente au fait que la vitesse initiale de tout point est nulle est :

$$[\vec{\Omega}_S^g]_0 = [\vec{v}_S^g]_0 = \vec{0}$$

Appliquons les théorèmes généraux de la dynamique :

$$\vec{F}_{ex} = M \frac{d^g}{dt} \vec{v}^g(G) ; \vec{M}_{ex}(G) = \frac{d^g}{dt} \vec{\mu}^g(G)$$

D'après nos hypothèses :

$$\begin{aligned} \vec{v}^g(G) &= \vec{Cte} = [\vec{v}^g(G)]_0 = \vec{0} ; \vec{v}^g(G) = \vec{0} \text{ pour } t > 0 \\ \vec{\mu}^g(G) &= \vec{Cte} = [\vec{\mu}^g(G)]_0 ; \vec{\mu}^g(G) = \vec{I}_G \cdot \vec{\Omega}_S^g ; [\vec{\mu}^g(G)]_0 = \vec{I}_G \cdot [\vec{\Omega}_S^g]_0 \\ \vec{\mu}^g(G) &= \vec{0} ; \vec{\Omega}_S^g = \vec{0} ; t > 0 \end{aligned}$$

On a : $\vec{v}^g(G)$ et $\vec{\Omega}_S^g = \vec{0}$ pour tout t , c'est-à-dire :

$$\vec{v}^g(P) = \vec{0} \text{ pour tout } t$$

Le solide est donc en équilibre.

Théorème : pour qu'un solide initialement en équilibre reste en équilibre, il faut et il suffit que le **torseur des forces extérieures soit nul**.

Remarquons que ce théorème peut être utilisé pour deux genres de problèmes dans les systèmes :

- les **forces** étant **connues**, trouver la configuration d'équilibre en appliquant ce théorème à chacun des solides du système ;
- la **position d'équilibre** étant **donnée**, trouver certaines actions mécaniques.

Exemple

Exemple : Considérons le système à coulisse de la figure 3 et supposons le système à liaison parfaite. La liaison (S₀)/(S₁) est une liaison rotoïde et la liaison (S₀)/(S₂) une liaison prismatique. À (S₁) et (S₂) s'appliquent des actions mécaniques telles que :

$$\vec{M}_{E1}(O_1) \cdot \vec{Z}_0 = N_{E1} ; \vec{F}_{E2} \cdot \vec{X}_0 = X_{E2}$$

Pour le solide (S₁), on applique le théorème du moment en O₁ :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{E1}(O_1) \cdot \vec{Z}_0 + (\vec{O}_1 M \wedge \vec{F}_{21}) \cdot \vec{Z}_0 &= 0 \\ \vec{F}_{21} &= [X_{21}, 0, 0]^R \\ N_{E1} - X_{21} R \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

Pour le solide (S₂), on applique le théorème de la somme :

$$X_{12} + X_{E2} = 0$$

La condition d'équilibre est :

$$N_{E1} - X_{E2} R \sin \theta = 0$$

1.3.4 Stabilité

Il n'y a pas de méthodes directes d'étude de la stabilité par les théorèmes généraux. On utilise la méthode qui sera développée au paragraphe 2 pour les états stationnaires : on écrit les équations du mouvement voisin de l'état stationnaire, et on étudie leur comportement.

1.4 Statique par les méthodes énergétiques

C'est l'étude de l'équilibre par la méthode de Lagrange. Cependant, cette méthode nous apportera, dans certains cas, des éléments nouveaux en ce qui concerne la stabilité. Nous verrons que l'on peut étudier la stabilité sans écrire les équations, pour les systèmes à potentiel, grâce au théorème de Lejeune-Dirichlet.

1.4.1 Position d'équilibre d'un système. Théorème de d'Alembert

Pour un point matériel, nous avons montré que la condition nécessaire et suffisante d'équilibre était : $d\vec{F} = \vec{0}$, qui représente l'action mécanique agissant sur le point matériel et qui peut s'écrire :

$$d\vec{F}_e + d\vec{F}_i = \vec{0}$$

1.4.1.1 Condition nécessaire

Multiplions scalairement les deux membres de la relation par $\vec{v}^*(P)$, champ de vitesse virtuelle arbitraire (cf. article [A 1 666] de ce traité) :

$$d\vec{F}_e \cdot \vec{v}^*(P) + d\vec{F}_i \cdot \vec{v}^*(P) = 0$$

En sommant pour tous les points du système :

$$\begin{aligned} \int_{P \in S} d\vec{F}_e \cdot \vec{v}^*(P) + \int_{P \in S} d\vec{F}_i \cdot \vec{v}^*(P) &= 0 \\ \mathcal{P}_{ex}^* + \mathcal{P}_{in}^* &= 0 \end{aligned}$$

Si le système est en équilibre, la puissance virtuelle développée par toutes les actions mécaniques est nulle.

1.4.1.2 Condition suffisante

Nous allons montrer que la condition est aussi suffisante. Supposons un système initialement en équilibre tel que, dans toute transformation virtuelle, la puissance virtuelle développée par toutes les actions mécaniques soit négative ou nulle.

La configuration du système ne peut dépendre du temps. Car, s'il en était ainsi, certains éléments du système seraient sûrement en mouvement, ce qui, du même coup, rendrait sans objet notre étude.

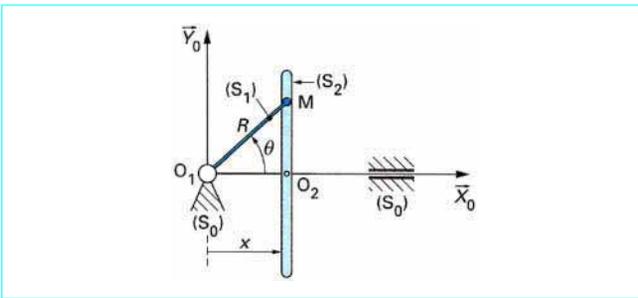


Figure 3 – Équilibre

Le champ de vitesse réelle appartient alors au champ de vitesse virtuelle. Nous pouvons donc, comme transformation particulière, prendre $\vec{v}^*(P) = \vec{v}^g(P)$. Par suite, nous aurons :

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^g \text{ (puissance réelle)}$$

Or le théorème de l'énergie cinétique nous indique que

$$\mathcal{P}^g = \frac{dT^g}{dt} \text{ (cf. article [A 1 664] de ce traité).}$$

Comme $T_0 = 0$ (équilibre initial), l'énergie cinétique ne peut être que croissante s'il y a mouvement, car elle est toujours positive. On aurait donc :

$$\mathcal{P}^* > 0, \text{ ce qui est contraire à l'hypothèse}$$

La seule solution est donc que le système reste en équilibre.

Théorème : pour qu'un système matériel initialement en équilibre reste en équilibre, il suffit que la puissance virtuelle développée par les actions mécaniques soit négative ou nulle dans toute transformation virtuelle (transformation générale).

1.4.1.3 Équations d'équilibre

La puissance virtuelle peut se mettre sous la forme générale, pour une transformation virtuelle quelconque :

$$\mathcal{P}^* = Q_1 q_1'^* + \dots + Q_i q_i'^* + \dots + Q_n q_n'^*$$

Nous pouvons utiliser les résultats établis pour les équations de Lagrange :

$$Q_i = 0 \quad \forall i \quad i = 1, \dots, n$$

Si le système est soumis à des liaisons, on peut toujours les mettre sous la forme générale :

$$\alpha_{j1} q_1'^* + \dots + \alpha_{ji} q_i'^* + \dots + \alpha_{jn} q_n'^* = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

(m étant le nombre de liaisons holonomes et non holonomes : $m = h + \ell$).

On peut écrire les équations sous l'une des deux formes :

$$Q_i = 0 \quad \text{(transformation quelconque)}$$

$$Q_i^* + \sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ji} = 0 \quad \text{(transformation compatible)}$$

On constate donc que les équations d'équilibre sont constituées des seconds membres des équations de Lagrange.

La méthode est particulièrement efficace pour les mécanismes, lorsqu'il y a des liaisons. Elle évite l'étude individuelle des éléments.

Exemple

Reprenons le système étudié au paragraphe 1.3.3 par les théorèmes généraux.

L'équation de liaison entre (S_1) et (S_2) s'écrit :

$$x - R \cos \theta = 0$$

$$x'^* + \theta'^* R \sin \theta = 0$$

Dans une transformation virtuelle compatible avec les liaisons $(S_1)/(S_0)$, $(S_2)/(S_0)$ et $(S_1)/(S_2)$:

$$\mathcal{P}^* = N_{E1} \theta'^* + X_{E2} x'^*$$

On peut, pour obtenir la relation entre N_{E1} et X_{E2} , procéder de 3 manières différentes :

— éliminer x'^* dans \mathcal{P}^* :

$$\mathcal{P}^* = (N_{E1} - X_{E2} R \sin \theta) \theta'^*$$

$$\mathcal{P}^* = 0 \text{ quel que soit } \theta'^*$$

$$N_{E1} - X_{E2} R \sin \theta = 0$$

— écrire la compatibilité du système :

$$x'^* + \theta'^* R \sin \theta = 0$$

$$X_{E2} x'^* + N_{E1} \theta'^* = 0$$

Le déterminant de ce système linéaire en x'^* et θ'^* doit être nul ;

$$N_{E1} - X_{E2} R \sin \theta = 0$$

— employer la théorie des multiplicateurs :

$$N_{E1} + \lambda = 0$$

$$X_{E2} + \lambda R \sin \theta = 0$$

et l'on élimine λ entre les deux équations.

1.4.2 Étude de l'équilibre et de la stabilité des systèmes à potentiel

Lorsqu'il y a potentiel, les équations d'équilibre prennent une forme remarquable et, en outre, la stabilité peut s'étudier à partir du potentiel.

1.4.2.1 Position d'équilibre

Nous avons vu que les conditions d'équilibre étaient :

$$Q_{iD} = 0$$

suivant que les paramètres étaient indépendants ou non.

S'il y a fonction potentiel pour les forces données, on aura :

$$Q_{iD} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Théorème : les positions d'équilibre sont obtenues pour les valeurs des paramètres qui rendent le potentiel stationnaire.

Par stationnaire, on entend qu'il y a maximum, minimum ou ni maximum, ni minimum, ce que nous illustrons dans le cas d'un paramètre q par les courbes de la figure 4.

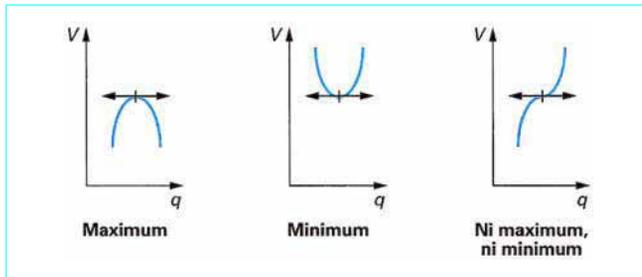


Figure 4 – Allure du potentiel V à l'équilibre

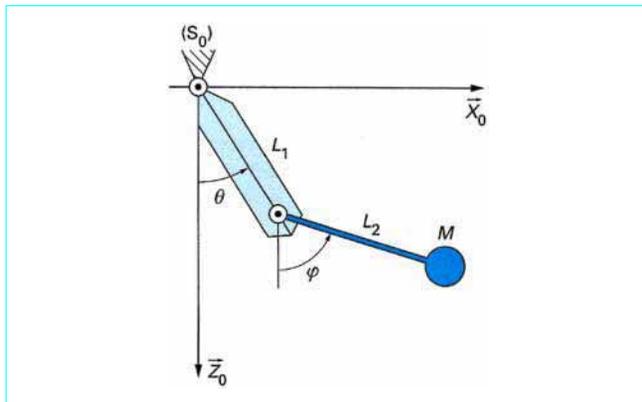


Figure 5 – Pendule double

La méthode est très simple à mettre en œuvre.

Exemple : pendule double (figure 5).

La masse est ponctuelle.

$$V = -Mg(L_1 \cos \theta + L_2 \cos \varphi) + Cte$$

Les positions d'équilibre sont obtenues pour les valeurs des paramètres telles que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0 ; \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= MgL_1 \sin \theta ; \frac{\partial V}{\partial \varphi} = MgL_2 \sin \varphi \\ \begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \sin \varphi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient 4 positions d'équilibre (S_1^*) , (S_2^*) , (S_3^*) , (S_4^*) représentées sur la figure 6.

Les équations algébriques n'étant pas linéaires, on constate que les positions d'équilibre sont multiples, ce qui a de nombreuses conséquences.

1.4.2.2 Stabilité. Théorème de Lejeune-Dirichlet

Nous énonçons ce théorème sans démonstration. Celle-ci est longue et fait appel aux notions de topologie. Par contre, sa mise en œuvre est très simple et fait appel aux connaissances de base en théorie des fonctions.

Théorème : si, pour un système de valeur des paramètres q_i^* , la fonction V présente un **minimum relatif isolé**, la position d'équilibre correspondante est stable.

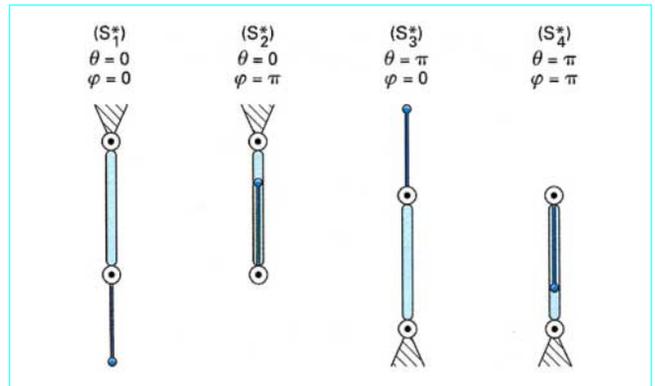


Figure 6 – Pendule double : positions d'équilibre

Illustrons ce résultat pour une fonction de deux variables :

$$V = V(q_1, q_2)$$

La fonction V définit une surface (figure 7). L'allure de la surface lorsqu'il y a équilibre est schématisée figure 7a.

1.4.2.3 Pratique de l'étude lorsqu'il y a potentiel

Lorsque l'on traite de l'équilibre, et particulièrement lorsqu'il y a potentiel, on traite simultanément la stabilité et l'étude du mouvement voisin. Ce dernier point sera développé au paragraphe 1.5. Équilibre et stabilité forment un ensemble indissociable. Nous allons illustrer cet état par quelques exemples.

■ **Système à un paramètre**

Le système de la figure 8 représente un pendule à deux masses.

On peut faire varier les conditions de stabilité en jouant sur les valeurs relatives de M_1 , M_2 , L_1 , L_2 .

● **Potentiel V**

$$V = -g(M_2L_2 - M_1L_1) \cos \varphi + Cte$$

● **Équilibre**

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= +g(M_2L_2 - M_1L_1) \sin \varphi \\ \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

d'où les solutions évidentes $\varphi^* = 0$; $\varphi_2^* = \pi$

Remarque : si $M_2L_2 - M_1L_1 = 0$, la dérivée est identiquement nulle. Le système est en équilibre dans toutes les positions. On dit que l'équilibre est **astatique** ou **indifférent**.

● **Stabilité**

Traisons d'abord le cas général où $M_2L_2 - M_1L_1$ est différent de 0.

On cherche la nature des extrémums à l'aide de la dérivée seconde.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = +g(M_2L_2 - M_1L_1) \cos \varphi$$

— position $\varphi^* = 0$ $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=0} = g(M_2L_2 - M_1L_1)$

$M_2L_2 - M_1L_1 > 0$, V présente un minimum pour $\varphi = 0$. **L'équilibre est stable,**

$M_2L_2 - M_1L_1 < 0$, V présente un maximum pour $\varphi = 0$. **L'équilibre est instable ;**

— position $\varphi^* = \pi$ $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=\pi} = -g(M_2L_2 - M_1L_1)$

Les conditions sont inverses ;

— cas particulier $M_2L_2 - M_1L_1 = 0$

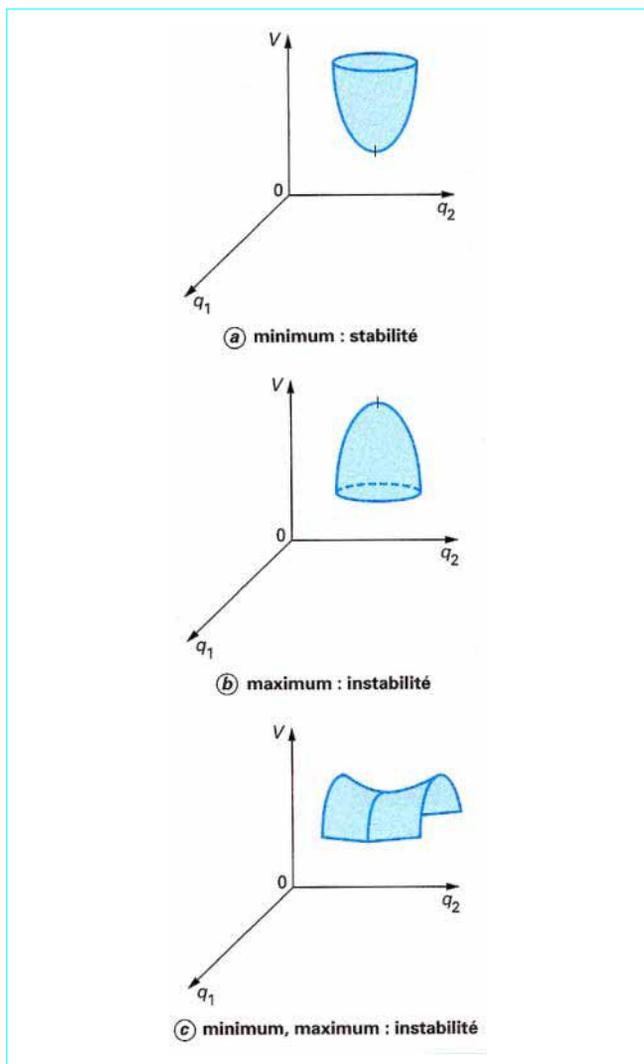


Figure 7 – Configuration à l'équilibre

Le théorème de Lejeune-Dirichlet est impuissant. Il faut étudier directement le mouvement. L'équation s'écrit immédiatement :

$$(M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2) \varphi'' + g(M_1 L_1 - M_2 L_2) \sin \varphi = 0$$

$$\varphi'' = 0$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \varphi_0' t + \varphi_0$$

Quel que soit φ aussi petit que l'on veut, φ n'est pas borné, l'équilibre est instable. Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse de **minimum relatif isolé** dans le théorème de Lejeune-Dirichlet. Ici, V est constant.

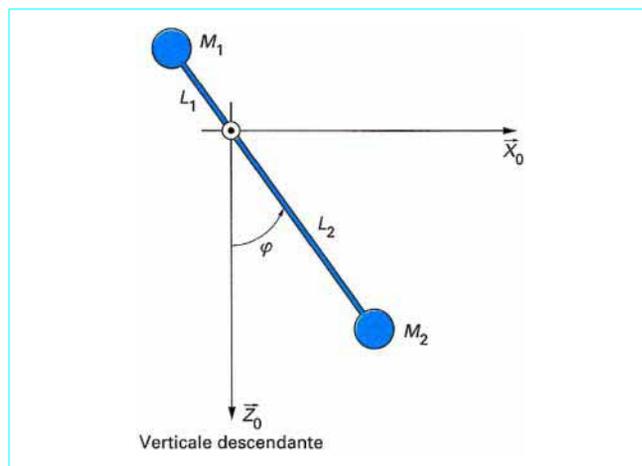


Figure 8 – Pendule à deux masses

Dans de nombreux cas, la dérivée seconde $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}$ peut s'annuler pour la position d'équilibre (sans être identiquement nulle comme ici). Il faut alors développer V à l'aide de la formule de Taylor, jusqu'à un ordre convenable :

$$q = q^* + \bar{q}$$

$$V = V^* + \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^* \bar{q} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)^* \bar{q}^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\right)^* \bar{q}^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial q^4}\right)^* \bar{q}^4 + \dots$$

Compte tenu de l'équilibre et du cas particulier :

$$V = V^* + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\right)^* \bar{q}^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial q^4}\right)^* \bar{q}^4 + \dots$$

Il faut étudier la nature du développement pour savoir si V est minimal. Notons à ce sujet que la théorie des catastrophes de R. Thom a apporté un éclairage nouveau sur ces cas singuliers mais riches d'applications pratiques.

■ **Système à deux paramètres**

Nous illustrerons la méthode avec le système à pendules orthogonaux de la figure 9.

Les barres sont sans masse et G_2 est une masse ponctuelle.

● **Potentiel**

$$V = -MgZ(G_2) + Cte$$

$$\vec{OG}_2 \cdot \vec{Z}_0 = L \cos \theta - b \cos \varphi \sin \theta$$

$$V = -MgL (\cos \theta - \sqrt{3} \cos \varphi \sin \theta) + Cte$$

$$V = V(\theta, \varphi)$$

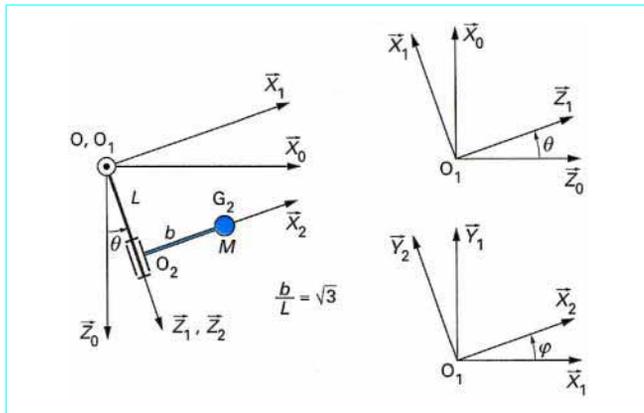


Figure 9 - Pendules orthogonaux

● Équilibre

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = MgL (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \varphi \cos \theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -MgL (\sqrt{3} \sin \varphi \sin \theta)$$

$$\begin{cases} \sin \theta + \sqrt{3} \cos \varphi \cos \theta = 0 \\ \sin \varphi \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Ce système algébrique non linéaire donne 8 couples de solutions, dont 6 sont représentés sur la figure 10.

On comprend facilement la complexité de la recherche des positions d'équilibre lorsque le nombre de paramètres augmente.

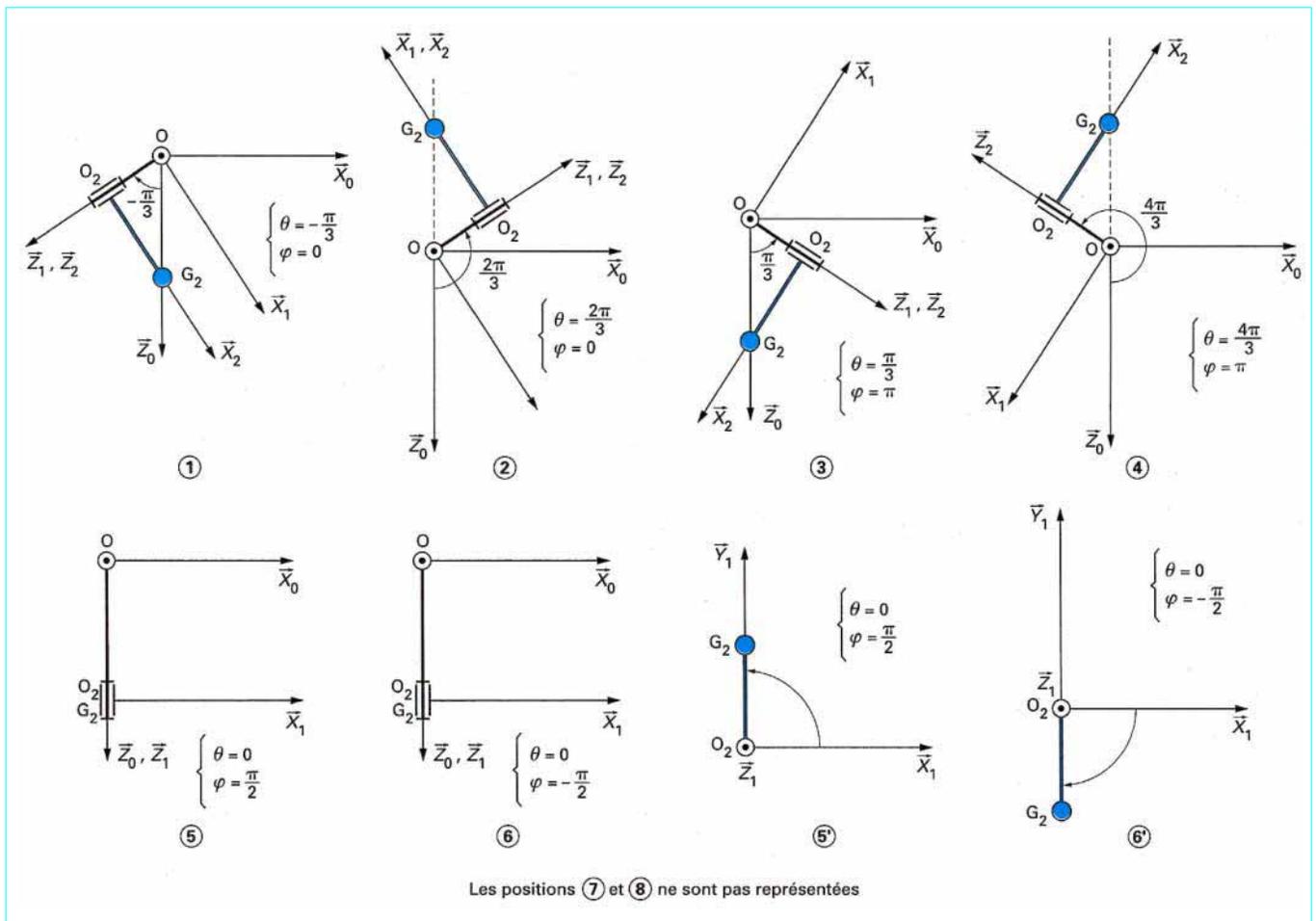


Figure 10 - Positions d'équilibre

● **Stabilité**

On utilise les résultats de la théorie des extrémums d'une fonction de 2 variables (tableau 1).

Tableau 1 – Nature des extrémums d'une fonction de deux variables

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)^* \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)^* - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^{*2} > 0 \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)^* < 0 \end{aligned} \right\} \text{Le point critique correspond à un } \mathbf{maximum}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)^* \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)^* - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^{*2} > 0 \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)^* > 0 \end{aligned} \right\} \text{Le point critique correspond à un } \mathbf{minimum}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)^* \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)^* - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^{*2} < 0 \quad \text{Il n'y a ni maximum, ni minimum}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)^* \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)^* - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^{*2} = 0 \quad \mathbf{0}$$

Soit $V = V(q_1, q_2)$, la forme générale du potentiel.

La condition de stabilité est donc :

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)^* \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)^* - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^{*2} > 0 ; \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)^* > 0$$

Dans notre exemple, nous avons :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = MgL (\cos \theta - \sqrt{3} \cos \varphi \sin \theta)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -MgL \sqrt{3} \cos \varphi \sin \theta ; \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} = -MgL \sqrt{3} \sin \varphi \cos \theta$$

Testons par exemple la nature de l'équilibre de la position

$$\theta = -\frac{\pi}{3}, \varphi = 0 :$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right)^* = 2MgL ; \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)^* = \frac{3}{2}MgL ; \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi}\right)^* = 0$$

On constate immédiatement que la condition de stabilité est réalisée.

L'on peut avoir un aperçu global (figure 11) du comportement système en traçant la surface représentative de $V(\theta, \varphi)$.

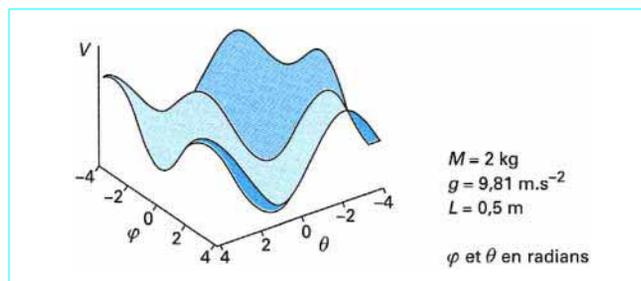


Figure 11 – Surface représentative de $V = -MgL (\cos \theta - \sqrt{3} \cos \varphi \sin \theta)$

■ **Système à 3 paramètres et plus**

On présente les résultats à l'aide de déterminants. La théorie correspond à celle des formes quadratiques (l'ensemble des termes du second ordre constitue une forme quadratique). Développons V au voisinage de l'équilibre.

$$q_i = q_i^* + \bar{q}_i$$

$$V = V^* + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)^* \bar{q}_i \bar{q}_j + \dots$$

Pour que la position d'équilibre corresponde à un minimum, l'ensemble des termes du second ordre doit être positif. Exprimons les résultats pour un système à 3 paramètres q_1, q_2, q_3 .

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)^* \bar{q}_i \bar{q}_j$$

$$= \frac{1}{2} [\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3] \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)^* & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^* & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_3}\right)^* \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1}\right)^* & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)^* & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_3}\right)^* \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_3 \partial q_1}\right)^* & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_3 \partial q_2}\right)^* & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_3^2}\right)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{bmatrix}$$

Soit $[V]$ la matrice de la forme quadratique ci-dessus. Le résultat provient du théorème de Sylvester : il y a la stabilité si tous les mineurs principaux de la matrice sont positifs.

1.5 Mouvement voisin d'une position d'équilibre stable

Ce paragraphe constitue un élément important de la théorie des vibrations linéaires. Les résultats obtenus permettent de traiter systématiquement un grand nombre de problèmes pratiques.

1.5.1 Conditions d'application de la théorie

Les conditions d'application doivent être précisées car elles sont restrictives :

- le système est à liaisons holonomes, indépendantes du temps ;
- les liaisons sont parfaites, ce qui signifie qu'en pratique il n'y a pas de frottement.

Cependant, sur ce point, on peut faire une extension de la méthode :

- il y a potentiel ;
- la stabilité est obtenue par le théorème de Lejeune-Dirichlet.

Les liaisons étant holonomes, on peut considérer que l'on a un système à n paramètres indépendants q_1, \dots, q_n .

■ Dans la **position d'équilibre**, les paramètres prennent les valeurs : q_1^*, \dots, q_n^* .

■ Dans la **position voisine**, on peut les exprimer sous la forme $q_i = q_i^* + \bar{q}_i$.

Compte tenu des hypothèses, on a les résultats très importants :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} q'_i q'_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{q}'_i \bar{q}'_j$$

T est une forme quadratique définie positive.

$$V = V^* + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)^* \bar{q}_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)^* \bar{q}_i \bar{q}_j + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right)^* \bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k + \dots$$

Compte tenu de l'équilibre, et en supposant que l'ensemble des termes du second ordre n'est pas nul, on peut écrire :

$$V = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)^* \bar{q}_i \bar{q}_j + \dots$$

S'il y a stabilité, la forme quadratique du second membre est définie positive.

Nous allons montrer qu'en fait l'étude revient à celle des formes quadratiques.

1.5.2 Linéarisation des équations du mouvement

On écrit les équations par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \quad r = 1, \dots, n$$

Dans tout ce qui suit, nous supprimerons les symboles de sommation Σ en employant la convention de l'indice muet.

1.5.2.1 Linéarisation des termes $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r}$

$$\frac{\partial T}{\partial q'_r} = \sum_{i=1}^n a_{ri} q'_i$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} = \sum_{i=1}^n a_{ri} q''_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} a_{ri} \right) q'_i$$

mais

$$\frac{d}{dt} a_{ri} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} q'_j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} = \sum_{i=1}^n a_{ri} q''_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} q'_i q'_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_r} q'_i q'_j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^n a_{ri} q''_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} q'_i q'_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_r} q'_i q'_j$$

Compte tenu de la symétrie des a_{ij} , on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^n a_{ri} q''_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{rj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_r} \right) q'_i q'_j$$

Posons $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{rj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_r} \right) = \begin{bmatrix} i & j \\ r \end{bmatrix}$

Ce symbole est appelé **symbole de Christoffel**.

Avec cette notation, on a donc :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^n a_{ri} q''_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} i & j \\ r \end{bmatrix} q'_i q'_j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^n a_{ri} \bar{q}''_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} i & j \\ r \end{bmatrix} \bar{q}'_i \bar{q}'_j$$

Nous avons vu que les \bar{q}'_i sont de même ordre que les \bar{q}_i , donc on peut déjà écrire :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^n a_{ri} \bar{q}''_i \text{ au deuxième ordre près}$$

Mais $a_{ri} = a^*_{ri} + \left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial q_1} \right)^* \bar{q}_1 + \dots$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = a^*_{ri} \bar{q}''_i$$

On a établi ainsi le résultat pratique très important : on obtient directement les termes linéaires en employant T_s , dite énergie cinétique simplifiée.

$$T_s = \frac{1}{2} a^*_{ij} \bar{q}'_i \bar{q}'_j$$

T_s est obtenu en remplaçant les a_{ij} par leur valeur à l'équilibre et les q' par les \bar{q}' .

1.5.2.2 Linéarisation des termes $\frac{\partial V}{\partial q_r}$

En posant $C^*_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)^*$, V prend la forme :

$$V = V^* + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C^*_{ij} \bar{q}_i \bar{q}_j + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right)^* \bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k + \dots$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = + \sum_{j=1}^n C^*_{rj} \bar{q}_j + \text{somme des termes du 2}^\circ \text{ ordre}$$

Pour obtenir les termes linéaires, il suffit de prendre V_s tel que :

$$V_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}^* \bar{q}_i \bar{q}_j$$

V_s est obtenu en prenant les termes du 2^e ordre dans le développement de V . L'équation de Lagrange $\mathcal{L}(q_r)$ s'écrit donc :

$$\sum_{i=1}^n a_{ri}^* \bar{q}_i'' + \sum_{i=1}^n C_{ri}^* \bar{q}_i = 0$$

C'est un système différentiel du second ordre à coefficients constants.

1.5.3 Écriture automatique des équations sous forme matricielle

Compte tenu du résultat précédent, on peut écrire le système sous la forme :

$$[a_{ij}^*] \begin{bmatrix} \bar{q}_1'' \\ \vdots \\ \bar{q}_n'' \end{bmatrix} + [C_{ij}^*] \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} = 0$$

$$[T_s] \begin{bmatrix} \bar{q}_1'' \\ \vdots \\ \bar{q}_n'' \end{bmatrix} + [V_s] \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} = 0$$

Les matrices $[T_s]$ et $[V_s]$ s'obtiennent directement.

En pratique, il est donc utile de développer les équations du mouvement.

1.5.4 Solution générale. Modes propres. Valeurs propres

1.5.4.1 Principe de résolution

La matrice $[T_s]$ étant symétrique réelle, $[T]^{-1}$ existe et, en posant $[D] = [T]^{-1} [V]$, on a :

$$\begin{bmatrix} \bar{q}_1'' \\ \vdots \\ \bar{q}_n'' \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} = 0$$

Le système est représenté dans la base de configuration par le vecteur $\vec{V} = [\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n]$ et dans une autre base par $\vec{V} = [X_1, \dots, X_n]$.

$$\begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

avec $[P]$ matrice de passage,

de sorte que le système différentiel s'écrit avec les nouveaux paramètres :

$$\begin{bmatrix} X_1'' \\ \vdots \\ X_n'' \end{bmatrix} + [P]^{-1} [D] [P] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = 0$$

On a les résultats très importants suivants, obtenus en mathématiques (théorie des matrices et des formes quadratiques) :

— on peut choisir la nouvelle base pour que $[P]^{-1} [D] [P]$ soit une matrice diagonale :

$$[P]^{-1} [D] [P] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

— les λ_i , appelés valeurs propres, sont réels et positifs :

$$\lambda_j = \sqrt{\Omega_j^2}$$

— les colonnes de $[P]$ sont formées des vecteurs propres \vec{W}_j de $[D]$. Ces vecteurs propres sont définis par : $[D] \cdot \vec{W}_j = \lambda_j \vec{W}_j$.

Mais, notons que l'on définit en fait des directions propres. La théorie ne donne que le rapport des α_{ij} à l'un d'entre eux qui peut être choisi arbitraire.

Solution dans la base propre et dans la base de configuration.

Le système peut donc toujours s'écrire :

$$\begin{bmatrix} X_1'' \\ \vdots \\ X_j'' \\ \vdots \\ X_n'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = 0$$

On a donc un système de n équations différentielles très simples :

$$X_j'' + \Omega_j^2 X_j = 0$$

Le système se présente donc sous la forme dite découplée :

$$X_j = M_j \cos \Omega_j t + N_j \sin \Omega_j t$$

$$X_j = A_j \cos (\Omega_j t + \varphi_j)$$

En posant $\vec{W}_j = [\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj}]$, la solution dans la base de configuration s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_i \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1j} \dots \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{i1} \dots \alpha_{ij} \dots \alpha_{in} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \dots \alpha_{nj} \dots \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_j \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

soit, sous la forme développée :

$$\bar{q}_i = \alpha_{i1} A_1 \cos (\Omega_1 t + \varphi_1) + \dots + \alpha_{ij} A_j \cos (\Omega_j t + \varphi_j) + \dots + \alpha_{in} A_n \cos (\Omega_n t + \varphi_n)$$

Les α_{ij} sont donnés par la diagonalisation. Le système dépend de $2n$ constantes arbitraires, déterminées à l'aide des conditions initiales ($t = 0, \bar{q}_i = \bar{q}_{i0}, \bar{q}_i' = \bar{q}_{i0}'$).

1.5.4.2 Terminologie

- Un terme tel que $X_j = A_j \cos(\Omega_j t + \varphi_j)$ est dit **vibration fondamentale**.
- La **solution** dans la **base de configuration** est donc la superposition des vibrations fondamentales.
- Le mouvement particulier suivant est dit **mode propre 1** :

$$\begin{pmatrix} \bar{q}_1 = A_1 \alpha_{11} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) \\ \dots\dots\dots \\ \bar{q}_i = A_1 \alpha_{i1} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) \\ \dots\dots\dots \\ \bar{q}_n = A_1 \alpha_{n1} \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) \end{pmatrix}$$

Les colonnes $\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{ij} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$ sont dites colonnes des modes.

1.5.4.3 Résultats complémentaires

■ **Orthogonalité des modes propres**

Soit \vec{W}_r et \vec{W}_s deux vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_r et λ_s distinctes.

On a montré que, si \vec{W} est un vecteur propre de $[T]^{-1} [V]$ associé à la valeur propre λ , on a : $[V] \cdot \vec{W} = \lambda [T] \cdot \vec{W}$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} [V] \cdot \vec{W}_r &= \lambda_r [T] \cdot \vec{W}_r \\ [V] \cdot \vec{W}_s &= \lambda_s [T] \cdot \vec{W}_s \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \vec{W}_s' \cdot [V] \cdot \vec{W}_r &= \lambda_r \vec{W}_s' \cdot [T] \cdot \vec{W}_r \\ \vec{W}_r' \cdot [V] \cdot \vec{W}_s &= \lambda_s \vec{W}_r' \cdot [T] \cdot \vec{W}_s \end{aligned}$$

Mais comme les autres matrices $[T]$ et $[V]$ sont symétriques, les formes bilinéaires figurant aux premiers membres sont égales. Il en est de même de celles du second membre, donc :

$$0 = (\lambda_r - \lambda_s) \vec{W}_s' \cdot [T] \cdot \vec{W}_r$$

Soit encore $\vec{W}_s' \cdot [T] \cdot \vec{W}_r = 0$

Cette relation est appelée **relation d'orthogonalisation**.

On a de même :

$$\vec{W}_s' \cdot [V] \cdot \vec{W}_r = 0$$

On dit que les vecteurs propres sont orthogonaux, avec une nouvelle définition de l'orthogonalité (orthogonalité au sens hermitien).

■ **Normalisation**

Nous avons vu qu'un arbitraire subsiste dans la détermination des vecteurs propres. Nous avons, par exemple, levé cette indétermination en choisissant une composante. Nous pouvons utiliser cet arbitraire autrement.

Choisissons les vecteurs propres vérifiant :

$$\vec{W}_r' \cdot [T] \cdot \vec{W}_r = 1 \quad \forall r$$

On dit alors que l'on a *normalisé* les vecteurs propres. Avec une nouvelle définition de la normalisation (au sens hermitien), on peut condenser les relations de normalité et d'orthogonalisation en une formule unique :

$$\vec{W}_s' \cdot [T] \cdot \vec{W}_r = \delta_{sr} \quad [\delta_{sr} : \text{symbole de Kronecker}]$$

1.5.4.4 Exemple général

Le pendule d'Euler a été étudié dans l'article [A 1 666]. Nous en reprenons les éléments essentiels (figure 12) :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [(M+m) x'^2 + mL^2 \theta'^2 + 2 mL x' \theta' \cos \theta] \\ V &= \frac{1}{2} K (x - x_0)^2 - mgL \cos \theta + \text{Cte} \end{aligned}$$

■ **Équilibre**

$$\begin{cases} K(x - x_0) = 0 \\ mgL \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Il y a deux positions d'équilibre (S_1^*) : $(x^* = x_0 ; \theta^* = 0)$;

(S_2^*) : $(x^* = x_0 ; \theta^* = \pi)$.

■ **Stabilité**

Le théorème de Lejeune-Dirichlet indique que seule la position $x^* = x_0, \theta^* = 0$ est stable [V minimal de toute évidence].

■ **Petits mouvements autour de la position stable $x^* = x_0, \theta^* = 0$**

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \bar{x} \\ \theta &= 0 + \bar{\theta} \end{aligned}$$

On a immédiatement :

$$T_s = \frac{1}{2} [(M+m) \bar{x}'^2 + mL^2 \bar{\theta}'^2 + 2 mL \bar{x}' \bar{\theta}']$$

$$T_s = \frac{1}{2} [\bar{x}', \bar{\theta}'] \begin{bmatrix} (M+m) & mL \\ mL & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{\theta}' \end{bmatrix}$$

$$V_s = \frac{1}{2} K \bar{x}^2 + \frac{1}{2} mgL \bar{\theta}^2$$

$$V_s = \frac{1}{2} [\bar{x}, \bar{\theta}] \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M+m & mL \\ mL & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}'' \\ \bar{\theta}'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

Pour continuer commodément les calculs, nous prendrons des valeurs particulières pour les éléments du système.

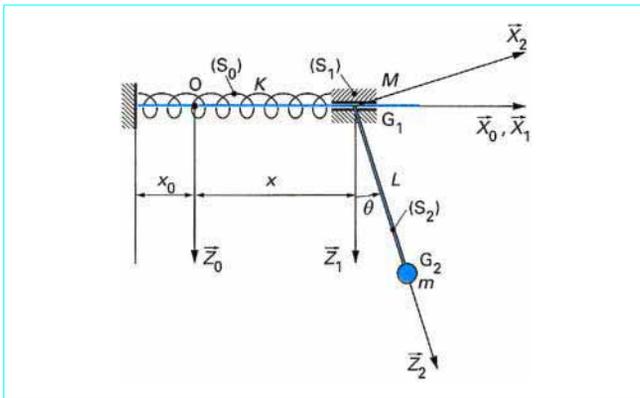


Figure 12 - Pendule d'Euler : petits mouvements

■ Calcul de la matrice [D]

$$[T_s]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & -\frac{1}{ML} \\ -\frac{1}{ML} & \frac{M+m}{Mm} \cdot \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$[D] = [T_s]^{-1} [V_s] = \begin{bmatrix} \frac{K}{M} & -\frac{m}{M}g \\ -\frac{K}{ML} & \frac{M+m}{M} \cdot \frac{g}{L} \end{bmatrix}$$

Preons les valeurs particulières :

$$m = 3 \text{ kg} ; M = 9 \text{ kg} ; L = 0,5 ; K = \frac{g}{L} (M + m)$$

Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \frac{g}{L} & -\frac{1}{3}g \\ -\frac{4}{3} \frac{g}{L^2} & \frac{4}{3} \frac{g}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$

■ Valeurs propres λ

On les obtient en annulant le déterminant de la matrice [D] - λ[I] :

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} \frac{g}{L} - \lambda & -\frac{1}{3}g \\ -\frac{4}{3} \frac{g}{L^2} & \frac{4}{3} \frac{g}{L} - \lambda \end{vmatrix} = 0 ; \left(2 \frac{g}{L} - \lambda\right) \left(\frac{2}{3} \frac{g}{L} - \lambda\right) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \frac{g}{L} ; \Omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{g}{L}}$$

$$\lambda_2 = 2 \frac{g}{L} ; \Omega_2 = \sqrt{2 \frac{g}{L}}$$

■ Valeurs propres

$$\vec{W}_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{21}] ; \vec{W}_2 = [\alpha_{12}, \alpha_{22}]$$

$$\vec{W}_1 \text{ et } \vec{W}_2 \text{ vérifient } [D] \cdot \vec{W}_1 = \lambda_1 \vec{W}_1 \text{ et } [D] \cdot \vec{W}_2 = \lambda_2 \vec{W}_2$$

$$\bullet \left(\frac{4}{3} \frac{g}{L} - \frac{2}{3} \frac{g}{L}\right) \alpha_{11} - \frac{1}{3}g \alpha_{21} = 0$$

On peut choisir arbitrairement $\alpha_{11} = 1$, alors $\alpha_{21} = \frac{2}{L}$.

$$\vec{W}_1 = \left[1, \frac{2}{L}\right]$$

• De même, on aura :

$$\vec{W}_2 = \left[1, -\frac{2}{L}\right]$$

On aurait pu également, pour lever l'arbitraire, utiliser la relation de normalisation.

■ Solution dans la base propre

Le système différentiel s'écrit :

$$X_1'' + \frac{2}{3} \frac{g}{L} X_1 = 0 ; X_2'' + 2 \frac{g}{L} X_2 = 0$$

$$X_1 = A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) ; X_2 = A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

■ Solution dans la base de configuration

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{L} & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) \\ A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\bar{\theta} = \frac{2}{L} A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - \frac{2}{L} A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2)$$

Il y a 4 constantes arbitraires $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$.

■ Détermination des constantes par les conditions initiales

Pour $t = 0$ $\bar{x} = \bar{x}_0 ; \bar{x}' = \bar{x}_0' = 0 ; \bar{\theta} = \bar{\theta}_0 ; \bar{\theta}' = \bar{\theta}_0' = 0$ (essai par lâcher).

$$\bar{x}_0 = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$$

$$\bar{\theta}_0 = \frac{2}{L} A_1 \cos \varphi_1 - \frac{2}{L} A_2 \cos \varphi_2$$

$$\bar{x}_0' = -A_1 \Omega_1 \sin \varphi_1 - A_2 \Omega_2 \sin \varphi_2 = 0$$

$$\bar{\theta}_0' = -\frac{2}{L} A_1 \Omega_1 \sin \varphi_1 + \frac{2}{L} A_2 \Omega_2 \sin \varphi_2 = 0$$

• On peut choisir pour les deux dernières équations :

$$\varphi_1 = 0 ; \varphi_2 = 0$$

• Les deux premières équations donnent alors :

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\bar{x}_0 + \frac{L}{2} \bar{\theta}_0\right) ; A_2 = \frac{1}{2} \left(\bar{x}_0 - \frac{L}{2} \bar{\theta}_0\right)$$

Preons des valeurs particulières pour x_0 et θ_0 :

$$\bar{x}_0 = 0,5 ; \bar{\theta}_0 = \frac{\pi}{4} ;$$

$$\bar{x} = 0,34 \cos 3,6 t + 0,15 \cos 6,26 t$$

$$\bar{\theta} = 1,39 \cos 3,6 t - 0,60 \cos 6,26 t$$

Le mouvement est représenté sur les figures 13 et 14.

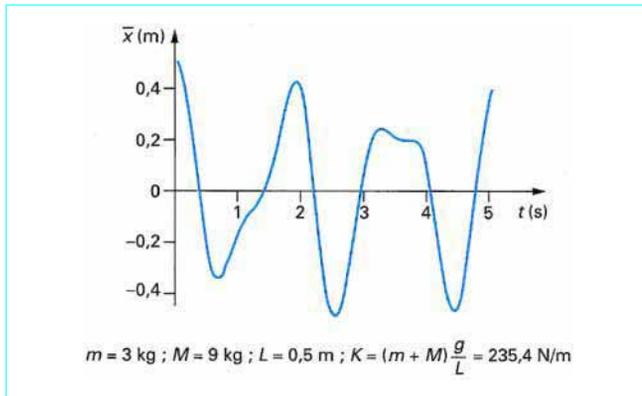


Figure 13 – Représentation de $\bar{x}(t)$

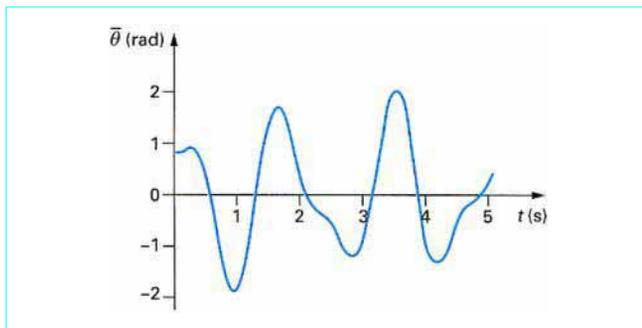


Figure 14 – Représentation de $\bar{\theta}(t)$

1.5.5 Extension de la méthode aux systèmes dissipatifs à fonction dissipation

1.5.5.1 Équilibre

Du fait de la présence de φ , nous avons :

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} b_{ij} q'_i q'_j \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{1}{2} [q'_i, \dots, q'_n] [b_{ij}] \begin{bmatrix} q'_i \\ \vdots \\ q'_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q'_r} = b_{ri} q'_i$$

À l'équilibre $\frac{\partial \varphi}{\partial q'_r} = 0$.

La condition d'équilibre est toujours donnée par : $\frac{\partial V}{\partial q_r} = 0$.

La présence de φ ne change pas la position d'équilibre.

1.5.5.2 Stabilité

La puissance développée par les actions de liaison est négative. Le théorème de Lejeune-Dirichlet s'applique encore, la condition de stabilité est renforcée.

1.5.5.3 Équations du mouvement voisin de l'équilibre

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0$$

Le nouveau terme $\frac{\partial \varphi}{\partial q_r}$ se linéarise en $\frac{\partial \varphi}{\partial q'_r} = b_{ri}^* q'_i$.

b_{ri}^* est obtenu en remplaçant b_{ri} par sa valeur d'équilibre. On obtient directement ce résultat en employant φ_s au lieu de φ .

$$\varphi_s = \frac{1}{2} [\bar{q}'_1, \dots, \bar{q}'_n] [\varphi_s] \begin{bmatrix} q'_1 \\ \vdots \\ q'_n \end{bmatrix}; [\varphi_s] = [b_{ij}^*]$$

Finalement, le système s'écrit sous forme matricielle :

$$[a_{ij}^*] \begin{bmatrix} \bar{q}_1'' \\ \vdots \\ \bar{q}_n'' \end{bmatrix} + [b_{ij}^*] \begin{bmatrix} \bar{q}_1' \\ \vdots \\ \bar{q}_n' \end{bmatrix} + [c_{ij}^*] \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} = 0$$

Le système s'écrit directement sans avoir à développer les calculs à l'aide des trois matrices $[T_s]$, $[\varphi_s]$, $[V_s]$.

On a, à nouveau, un système différentiel linéaire à coefficients constants. Mais nous ne pouvons pas procéder comme précédemment car, au fond, on ne peut diagonaliser dans le cas général simultanément trois formes quadratiques. On ne peut avoir une approche modale classique comme nous l'avons fait avec les systèmes conservatifs.

1.5.5.4 Solution

Nous ne ferons pas ici l'extension de la théorie modale, mais nous emploierons l'approche mathématique classique. La théorie générale des systèmes linéaires nous indique qu'il faut chercher une solution sous la forme :

$$\bar{q}_j = A_j e^{rt}$$

En portant dans le système, on peut écrire :

$$e^{rt} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & a_{ij}^* r^2 + b_{ij}^* r + c_{ij}^* & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = 0$$

C'est un système linéaire et homogène en A_j . Pour avoir une solution autre que la solution banale, on doit avoir le déterminant des coefficients nuls.

$$| a_{ij}^* r^2 + b_{ij}^* r + c_{ij}^* | = 0$$

Développé, ce déterminant est une équation algébrique de degré $2n$.

$$a_0 r^{2n} + a_1 r^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} r + a_{2n} = 0$$

On démontre le résultat important suivant : si les racines sont réelles, elles sont négatives ; si elles sont complexes, elles sont à partie réelle négative.

On peut toujours considérer une racine réelle comme une racine complexe à partie imaginaire nulle.

$$\varphi = \frac{1}{2} b_1 \left(\frac{dL_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} b_2 \left(\frac{dL_2}{dt} \right)^2$$

$$\varphi_s = \frac{1}{2} b_1 (\bar{z}' - a_1 \bar{\theta}')^2 + \frac{1}{2} b_2 (\bar{z}' - a_2 \bar{\theta}')^2$$

$$\begin{cases} T_s = \frac{1}{2} [\bar{z}', \bar{\theta}'] \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}' \\ \bar{\theta}' \end{bmatrix} \\ \varphi_s = \frac{1}{2} [\bar{z}', \bar{\theta}'] \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & b_2 a_2 - b_1 a_1 \\ b_2 a_2 - b_1 a_1 & b_1 a_1^2 + b_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}' \\ \bar{\theta}' \end{bmatrix} \\ V_s = \frac{1}{2} [\bar{z}, \bar{\theta}] \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 a_2 - k_1 a_1 \\ k_2 a_2 - k_1 a_1 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Le système s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}'' \\ \bar{\theta}'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & b_2 a_2 - b_1 a_1 \\ b_2 a_2 - b_1 a_1 & b_1 a_1^2 + b_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}' \\ \bar{\theta}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 a_2 - k_1 a_1 \\ k_2 a_2 - k_1 a_1 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

Pour la suite, nous prendrons :

$$M = 1\,000 \text{ kg} ; I = 1\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ; a_1 = 1,5 \text{ m} ; a_2 = 1 \text{ m}$$

$$K_2 = 34\,000 ; K_1 = 16\,000 ; b_2 = 2\,700 ; b_1 = 1\,500$$

$$\begin{bmatrix} 1\,000 & 0 \\ 0 & 1\,500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}'' \\ \bar{\theta}'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\,200 & -450 \\ -450 & 6\,075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}' \\ \bar{\theta}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50\,000 & -10\,000 \\ -10\,000 & 70\,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

■ Résolution

$$\bar{z} = A_1 e^{rt} ; \bar{\theta} = A_2 e^{rt}.$$

A_1 et A_2 vérifient le système :

$$\begin{bmatrix} 1\,000 r^2 + 4\,200 r + 50\,000 & 0 \cdot r^2 - 450 r - 10\,000 \\ 0 \cdot r^2 - 450 r - 10\,000 & 1\,500 r^2 + 6\,075 r + 70\,000 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

■ Équation caractéristique

On écrit que le déterminant de la matrice est nul. C'est une équation du 4^e degré en r .

$$1,5 \times 10^6 r^4 + 0,1238 \times 10^8 r^3 + 0,1705 \times 10^9 r^2 + 0,5978 \times 10^9 r + 0,34 \times 10^{10} = 0$$

Ses racines sont :

$$r_1 = -2,056 + 5,98 i ; r_2 = -2,056 - 5,98 i$$

$$r_3 = -2,071 + 7,32 i ; r_4 = -2,071 - 7,32 i$$

■ Solution générale. Rapport d'amplitude

$$\bar{z} = A_{11} e^{r_1 t} + A_{12} e^{r_2 t} + A_{13} e^{r_3 t} + A_{14} e^{r_4 t}$$

$$\bar{\theta} = A_{21} e^{r_1 t} + A_{22} e^{r_2 t} + A_{23} e^{r_3 t} + A_{24} e^{r_4 t}$$

Soit encore comme nous l'avons vu :

$$\bar{z} = B_{11} e^{-2,056 t} \cos(5,98 t + \varphi_1) + B_{13} e^{-2,071 t} \cos(7,32 t + \varphi_2)$$

$$\bar{\theta} = B_{11} R_{21} e^{-2,056 t} \cos(5,98 t + \psi_{21} + \varphi_1) + B_{13} R_{23} e^{-2,071 t} \cos(7,32 t + \psi_{23} + \varphi_2)$$

Les rapports $\frac{A_{11}}{A_{21}} ; \frac{A_{12}}{A_{22}} ; \frac{A_{13}}{A_{23}} ; \frac{A_{14}}{A_{24}}$ sont bien déterminés et sont

conjugués deux à deux. Il suffit de remplacer dans le système linéaire r par r_1, r_2, r_3, r_4 .

$$\beta_{21} = 0,0298 - 0,364 i \quad \beta_{22} = 0,0298 + 0,346 i$$

$$\beta_{23} = 0,0086 + 0,2055 i \quad \beta_{24} = 0,0086 - 0,2055 i$$

$$\beta_{21} = R_{21} e^{i\psi_{21}} ; \quad \beta_{23} = R_{23} e^{i\psi_{23}}$$

$$\psi_{21} = 4,79 ; \quad \psi_{23} = 1,52$$

$$R_{21} = 0,36 ; \quad R_{23} = 0,2$$

Finalement :

$$\bar{z} = B_{11} e^{-2,056 t} \cos(5,98 t + \varphi_1) + B_{13} e^{-2,071 t} \cos(7,32 t + \varphi_2)$$

$$\bar{\theta} = 0,36 B_{11} e^{-2,056 t} \cos(5,98 t + 4,79 + \varphi_1) + 0,2 B_{13} e^{-2,071 t} \cos(7,32 t + 1,52 + \varphi_2)$$

Conditions initiales

Pour $t = 0$, $\bar{z} = \bar{z}_0$; $\bar{z}' = \bar{z}'_0$; $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0$; $\bar{\theta}' = \bar{\theta}'_0$.

Prenons, par exemple, $\bar{z}_0 \neq 0$, $\bar{z}'_0 = 0$ et $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}'_0$ de manière que le système vibre sur le 1^{er} mode. Pour cela, il faut $B_{13} = 0$. Prenons $\bar{z}_0 = 0,15 \text{ m}$.

$$\bar{z} = B_{11} e^{-2,056 t} \cos(5,98 t + \varphi_1)$$

$$\bar{\theta} = 0,36 B_{11} e^{-2,056 t} \cos(5,98 t + 4,79 + \varphi_1)$$

$$\bar{z}_0 = B_{11} \cos \varphi_1$$

$$0 = -2,056 B_{11} \cos \varphi_1 - 5,98 B_{11} \sin \varphi_1$$

$$\varphi_1 = -1,2396$$

$$B_{11} = 0,30$$

φ_1 et B_{11} étant connus maintenant, pour $t = 0$, on obtient $\bar{\theta}_0$ et $\bar{\theta}'_0$:

$$\bar{\theta}_0 = 0,10 \quad \bar{\theta}'_0 = -0,23$$

$$\bar{z} = 0,3 e^{-2,056 t} \cos(5,98 t - 1,23)$$

$$\bar{\theta} = 0,10 e^{-2,056 t} \cos(5,98 t + 3,56)$$

Puis, en dérivant θ' .

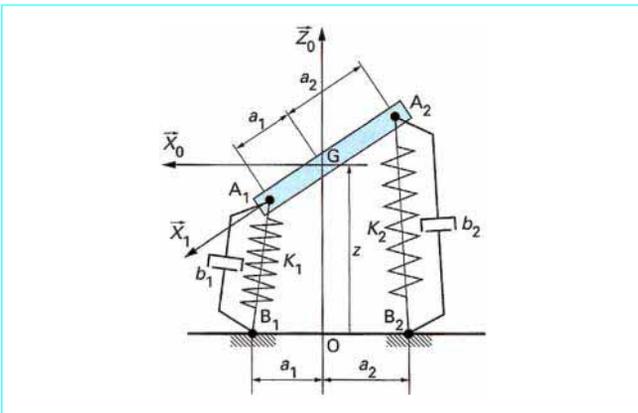


Figure 15 – Suspension de véhicule

2. États stationnaires

2.1 État de mouvement. État stationnaire

Nous avons étudié au paragraphe 1 un mouvement particulier : l'équilibre. Nous avons parlé à son propos d'état. Cette notion se généralise si l'on a un système à n paramètres q_1, \dots, q_n . Le mouvement est régi par le système différentiel décrit, par exemple, par les équations de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n$$

D'une manière générale, on appelle **état de mouvement** une solution connue du système différentiel :

$$q_i = f_i(t) \quad \forall i$$

Supposons que l'équation du mouvement à un paramètre soit celle d'un système masse-ressort (mouvement harmonique) :

$$x'' + \Omega^2 x = 0$$

La solution est :

$$x = x_0 \cos \Omega t + \frac{x'_0}{\Omega} \sin \Omega t$$

C'est un état de mouvement correspondant aux conditions initiales :

$$x = x_0 ; \quad x' = x'_0 \text{ pour } t = 0$$

On appelle **état stationnaire**, un état de mouvement pour lequel certains paramètres restent constants alors que, pour d'autres, ce sont les vitesses qui restent constantes :

$$\begin{cases} q_i = \text{Cte} = q_i^* & i = 1, \dots, k \\ \dot{q}_i = \text{Cte} = \dot{q}_i^* & i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

en supposant classés les paramètres (dans l'état d'équilibre tous les paramètres étaient constants).

Exemple 1 : si l'on considère le mouvement à force centrale (figure 16), où le mobile est repéré par r et θ en coordonnées polaires, une catégorie particulièrement remarquable (orbite circulaire) de mouvement est celle où $\begin{cases} r = \text{Cte} = r_0 \\ \theta' = \text{Cte} = \theta'_0 \end{cases}$

Exemple 2 : considérons le véhicule automobile en mouvement plan (figure 17), repéré par les paramètres x, y, θ . Un mouvement remarquable pour la conduite est :

$$\begin{cases} y = \text{Cte} \\ \theta = 0 \\ x' = \text{Cte} = v \end{cases}$$

C'est la marche en ligne droite.

Les mouvements stationnaires se rencontrent très fréquemment en mécanique au cours de l'étude de la marche des machines en régime permanent.

2.2 Stabilité au sens de Liapounov

Soit $\tilde{q}_i(t), \tilde{q}'_i(t)$, état de mouvement correspondant aux conditions $\tilde{q}_{i0}, \tilde{q}'_{i0}$ pour $t = 0$.

Prenons de nouvelles conditions initiales légèrement modifiées : q_{i0}, q'_{i0} . Il en résulte un état $q_i(t), q'_i(t)$. On dit que l'état $\tilde{q}_i(t), \tilde{q}'_i(t)$ est stable au sens de Liapounov si, à tout ε arbitrairement petit positif, on peut faire correspondre λ tel que.

$$\begin{cases} |q_{i0} - \tilde{q}_{i0}| < \lambda; & |q'_{i0} - \tilde{q}'_{i0}| < \lambda \text{ entraîne} \\ |q_i(t) - \tilde{q}_i(t)| < \varepsilon; & |q'_i(t) - \tilde{q}'_i(t)| < \varepsilon \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

Autrement si les conditions initiales sont peu différentes, on est assuré que les mouvements qui en résultent sont eux-mêmes peu différents.

On peut aussi employer le critère suivant, équivalent :

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i(t) - \tilde{q}_i(t))^2 + \sum_{i=1}^n (q'_i(t) - \tilde{q}'_i(t))^2}$$

que nous pouvons aussi appeler **écart**.

On dit que l'état de mouvement $q_i(t), q'_i(t)$ est stable si, à tout ε positif arbitrairement petit, on peut faire correspondre λ positif tel que :

$$r_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_{i0} - \tilde{q}_{i0})^2 + \sum_{i=1}^n (q'_{i0} - \tilde{q}'_{i0})^2} < \lambda$$

entraîne $r < \varepsilon$ pour $t > 0$.

L'équivalence résulte de l'équivalence des différentes distances dans un espace à n dimensions.

Dans la pratique, nous appliquerons la méthode suivante, dite méthode indirecte ou 2^e méthode de Liapounov, bien adaptée à la majorité des problèmes techniques.

La méthode banale pour étudier la stabilité serait de chercher la solution du système différentiel. La complexité des systèmes de la mécanique nous interdit pratiquement cette voie d'accès. Une simplification importante du système réel est obtenue en faisant un développement au premier ordre près des fonctions qui

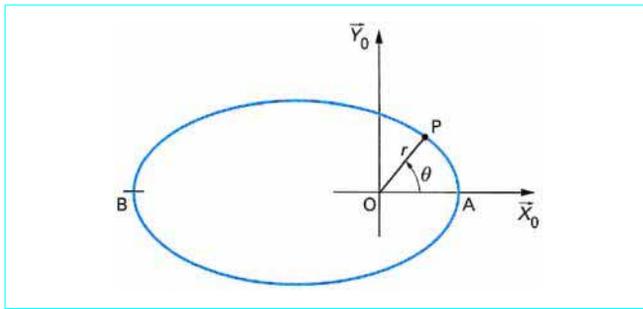


Figure 16 - Mouvement à force centrale

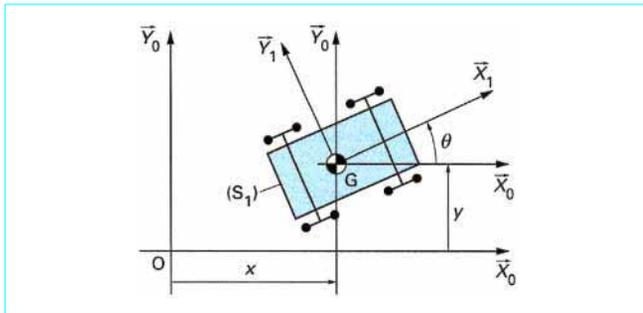


Figure 17 - Véhicule automobile en mouvement plan

interviennent dans les équations. On dit que l'on a linéarisé les équations. Le système simplifié obtenu est dit système linéaire associé (système différentiel linéaire à coefficients constants). On étudie alors la stabilité de ce dernier. Mais alors se pose le problème de savoir si nos conclusions sont valables pour le système réel.

On peut donc envisager l'étude de la stabilité sous la forme suivante :

- écriture des équations du mouvement (équation de Lagrange ou théorèmes généraux) ;
- recherche de l'état stationnaire ;
- linéarisation des équations ;
- étude de la stabilité du système linéaire associé ; nous montrerons qu'il n'est pas nécessaire de chercher effectivement les solutions (critère de Routh) ;
- justification de la linéarisation (théorème de Liapounov).

Remarque : il est bien clair que cette méthode peut s'appliquer à l'étude de la stabilité des équilibres et de tous les états stationnaires. Mais nous voyons qu'elle exige l'écriture des équations.

2.3 Écriture des équations

On les écrit par la méthode la plus adaptée, généralement théorèmes généraux ou équations de Lagrange, quelquefois équations d'Hamilton.

■ $\vec{F}_{\text{ex}} = M \vec{J}^{\theta}(G)$ $\vec{M}_{\text{ex}}(C) = \vec{\delta}^{\theta}(C)$

On applique ces équations à un certain nombre de sous-ensembles du système et on élimine les inconnues dynamiques (actions de liaison).

■ $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \delta'_i} - \frac{\partial T}{\partial \delta_i} = Q_i$

2.4 État stationnaire

Les équations étant écrites, on recherche, *a priori*, tel ou tel état stationnaire, qui correspond à une utilité pratique.

■ On tire les **conséquences** de l'état stationnaire :

$$q_i = q_i^* \rightarrow q'_i = 0; q''_i = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$q'_i = q'_i^* \rightarrow q''_i = 0 \quad i = k+1, \dots, n$$

■ On cherche à **quelles conditions** cette solution, posée *a priori*, vérifie les équations qui, de différentielles, deviennent algébriques.

Considérons le système de la figure 18, qui représente les éléments de base d'un régulateur. (S₁) est la ligne d'arbre. C'est un solide tournant autour d'un axe fixe. (S₂) est un pendule simple entraîné en rotation. La liaison (S₁)/(S₂) est imparfaite et donne lieu à une fonction de dissipation de Rayleigh. Sur (S₁) agissent des actions mécaniques telles que $\vec{M}_{\text{ex}}(O) \cdot \vec{Z}_1 = N_{E1}$; $N_{E1} = C_m + C_R$.

C_m et C_R sont appelés couple moteur et couple récepteur.

On veut obtenir l'état stationnaire $\theta = Cte$; $\psi' = Cte$. On suppose $N_{E1} = N_{E1}(\theta)$.

■ **Équations**

$$T = \frac{1}{2} I \psi'^2 + \frac{1}{2} M L^2 (\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta) \times 2$$

— actions de pesanteur : $V = -2 Mg L \cos \theta$

— actions dissipatives : $\varphi = \frac{1}{2} (4a^2 \sin^2 \theta) \theta'^2$

— actions du moteur et du récepteur : $\mathcal{P}_{E1}^* = N_{E1} \psi'^*$

On suppose N_{E1} fonction de θ (c'est le principe du régulateur ; si θ croît, le dispositif ferme l'arrivée de fluide). Par exemple :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_{\psi} ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta}$$

$$Q_{\psi} = N_{E1} ; \quad Q_{\theta} = - \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

$$(I + 2 M L^2 \sin^2 \theta) \psi'' + 4 M L^2 (\sin \theta \cos \theta) \theta' \psi' = N_{E1}$$

$$N_{E1} = K_1 + K_2 (\cos \theta - \cos \theta_1)$$

$$(2 M L^2 \sin^2 \theta + I) \psi'' + 4 M L^2 (\sin \theta \cos \theta) \theta' \psi' - (K_1 + K_2 (\cos \theta - \cos \theta_1)) = 0$$

$$M L^2 \theta'' - M L^2 (\sin \theta \cos \theta) \psi'^2 + 2a^2 \theta' \sin^2 \theta + Mg L \sin \theta = 0$$

■ **État stationnaire**

$$\theta = Cte = \theta^* \rightarrow \theta' = 0 ; \theta'' = 0$$

$$\psi' = Cte = \psi'^* \rightarrow \psi'' = 0$$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 (\cos \theta^* - \cos \theta_1) = 0 \\ - M L^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^{*2} + Mg L \sin \theta^* = 0 \end{cases}$$

● La première équation indique que, dans l'état stationnaire, le couple doit être nul.

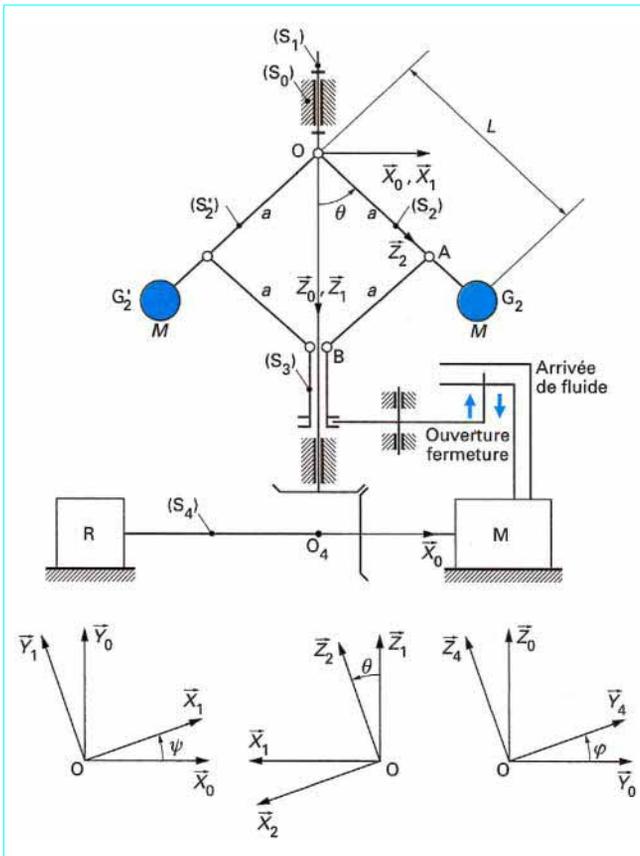


Figure 18 - Éléments de base d'un régulateur

● La deuxième équation indique quelle relation doit exister entre θ^* , ψ'^* et les dimensions du régulateur. Elle s'écrit :

$$\sin \theta^* \left[\frac{g}{L} - \psi'^{*2} \cos \theta^* \right] = 0$$

$$\sin \theta^* = 0 \quad (\theta^* = 0 \text{ ou } \theta^* = \pi)$$

$$\text{ou } -\frac{g}{L} - \psi'^{*2} \cos \theta^* = 0$$

Intéressons-nous, par exemple, à la position inclinée. Pour ψ'^* fixé, on a :

$$\cos \theta^* = \frac{g}{L} \frac{1}{\psi'^{*2}}$$

Cette solution n'existe que si :

$$\frac{g}{L} \frac{1}{\psi'^{*2}} \leq 1$$

Dans un problème d'état stationnaire, il y a en principe une discussion sur son existence.

2.5 Linéarisation

Par linéarisation, on entend transformer le système différentiel, en principe non linéaire, en un système à coefficients constants.

■ On pose :

$$\begin{cases} q_i = q_i^* + \bar{q}_i & \text{pour } i = 1, \dots, k \\ q'_i = q'_i{}^* + \bar{q}'_i & \text{pour } i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q'_i &= \bar{q}'_i ; q''_i = \bar{q}''_i & \text{pour } i = 1, \dots, k \\ q''_i &= \bar{q}''_i & \text{pour } i = k+1, \dots, n \end{aligned}$$

■ On développe toutes les fonctions par la formule de Taylor.

■ On ne conserve que les termes du premier ordre.

Notons que les termes constants qui correspondent à la solution stationnaire disparaissent des équations.

Exemple

Reprenons le cas du régulateur et écrivons les équations linéarisées correspondant à la position inclinée θ^* telle que

$$\frac{g}{L} - \cos \theta^* \psi'^{*2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \theta &= \theta^* + \bar{\theta} ; \psi' = \psi'^* + \bar{\psi}' \\ \theta' &= \bar{\theta}' ; \theta'' = \bar{\theta}'' ; \psi'' = \bar{\psi}'' \end{aligned}$$

$$(2 ML^2 \sin^2(\theta^* + \bar{\theta}) + I) \bar{\psi}'' + 4 ML^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* \bar{\theta}'$$

$$= N_{E1}^* + \left(\frac{\partial N_{E1}}{\partial \theta} \right)^* \bar{\theta} + \dots$$

$$ML^2 \bar{\theta}'' - ML^2 (\sin \theta^* + \bar{\theta} \cos \theta^* \dots) (\cos \theta^* - \bar{\theta} \sin \theta^* + \dots)$$

$$\times (\psi'^{*2} + 2 \psi'^* \bar{\psi}') + b^* L^2 \bar{\theta}' + Mg L (\sin \theta^* + \bar{\theta} \cos \theta^*) = 0$$

Avec $b^* L^2 = 2 a^2 \sin^2 \theta^*$.

En tenant compte de l'état stationnaire et en posant $K_2^* = K_2 \sin \theta^*$:

$$\begin{cases} (2 ML^2 \sin^2 \theta^* + I) \bar{\psi}'' + 4 ML^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* \bar{\theta}' \\ \hspace{15em} + K_2^* \bar{\theta} = 0 \\ ML^2 \bar{\theta}'' - ML^2 (\cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*) \psi'^{*2} \bar{\theta} \\ \hspace{10em} - 2 ML^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* \bar{\psi}' \\ \hspace{15em} + b^* L^2 \bar{\theta}' + Mg L \bar{\theta} \cos \theta^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2 ML^2 \sin^2 \theta^* + I) \bar{\psi}'' + 4 ML^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* \bar{\theta}' \\ \hspace{15em} + K_2^* \bar{\theta} = 0 \\ ML^2 \bar{\theta}'' + ML^2 \psi'^{*2} \bar{\theta} \sin^2 \theta + b^* L^2 \bar{\theta}' \\ \hspace{15em} - 2 ML^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* \bar{\psi}' = 0 \end{cases}$$

D'une manière générale, le résultat de la linéarisation est un système linéaire du 2^e ordre qui a donc nécessairement la forme :

$$\begin{bmatrix} a_{ij}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}'_1 \\ \vdots \\ \bar{q}'_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{ij}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}''_1 \\ \vdots \\ \bar{q}''_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{ij}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} = 0$$

Il a même forme que le système étudié dans la théorie des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable. Mais il y a une différence essentielle : on ne connaît rien, *a priori*, sur les matrices

$$\left[b_{ij}^* \right] \text{ et } \left[c_{ij}^* \right].$$

2.6 Stabilité du système linéaire associé

2.6.1 Solution

On a vu au paragraphe 1.5.5.4 que les solutions sont de la forme :

$$\bar{q}_j = A_j e^{rt}$$

Les A_j vérifient le système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{jj}^* r^2 + b_{jj}^* r + c_{jj}^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = 0$$

Les racines r vérifient l'équation caractéristique :

$$a_0 r^{2n} + a_1 r^{2n-1} + \dots + a_{2n} = 0$$

2.6.2 Nature des racines pour avoir stabilité

Au contraire de ce que nous avons au paragraphe 1.5.5.4, nous n'avons aucun renseignement sur la nature des racines.

Cas de racines imaginaires

$$r_k = \alpha_k + i \beta_k \rightarrow \bar{q}_j = A_{jk} e^{r_k t}$$

La racine imaginaire conjuguée s'écrit :

$$\bar{r}_k = \alpha_k - i \beta_k \rightarrow \bar{\bar{q}}_j = \bar{A}_{jk} e^{\bar{r}_k t}$$

Dans la solution générale, les solutions correspondant à ces deux racines imaginaires conjuguées s'ajoutent.

Nous avons vu que l'on peut écrire :

$$\bar{q}_{jk} + \bar{\bar{q}}_{jk} = \beta_{jk} e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \Phi_k)$$

Pour que la solution reste bornée, α_k doit être négatif ou nul.

Cas de racines réelles

Une solution telle que $\bar{q}_j = A_{jk} e^{r_k t}$ avec r_k réel ne peut correspondre à un mouvement stable que si r_k est négatif ou nul.

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est donc que l'équation caractéristique n'ait ni racine positive ni racine imaginaire à partie réelle positive.

Nous allons montrer qu'il n'est pas nécessaire de calculer les racines pour obtenir le renseignement cherché.

2.6.3 Critère de Routh

Soit une équation de degré n . On peut toujours la mettre sous la forme :

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0$$

avec $a > 0$. Si a_0 est négatif, on multiplie au préalable les deux membres de l'équation par -1 .

Plusieurs méthodes sont possibles pour étudier la nature des racines. Citons les deux principales :

- la méthode de Routh ;
- la méthode d'Urwitz.

Nous utiliserons la méthode de Routh bien adaptée à la mécanique.

2.6.3.1 Tableau de Routh

On dresse, à l'aide des coefficients, le tableau 2.

a_0	a_2	a_4	a_6	...	0
a_1	a_3	a_5	a_7	...	0
$a_1 a_2 - a_0 a_3$	$a_1 a_4 - a_0 a_5$	$a_1 a_6 - a_0 a_7$	0
$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3)$ $- a_1(a_1 a_4 - a_0 a_5)$	$a_5(a_1 a_2 - a_0 a_3)$ $- a_1(a_1 a_6 - a_0 a_7)$	0
.....	0
0	0	0	0	0	0

Les deux premières lignes sont formées à l'aide de coefficients. Le tableau est poursuivi jusqu'à ce que l'on obtienne des zéros à la fin de chaque colonne.

Exemple :

Prenons l'équation $y^3 + 4y^2 + 8y + 12 = 0$.

Le tableau s'écrit :

	1	8
	4	12
	$32 - 12 = +20$	0
	$20 \times 12 = 240$	0
	0	0

2.6.3.2 Théorème de Routh

1. Pour que l'équation proposée ait ses racines à **partie réelle négative**, il faut et il suffit que les éléments de la première colonne soient **tous positifs**.

2. Si les éléments de la première colonne changent de signe, le **nombre de changements de signe** donne le **nombre de racines à partie réelle positive**.

On montre encore le résultat suivant : le fait de diviser ou de multiplier une ligne par un même nombre positif ne change rien au résultat. Cela est très important pour simplifier au fur et à mesure les résultats.

2.6.3.3 Résultats pour les équations de degré 2, 3, 4

Équation du second degré : $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$

a_0	a_2	Les conditions de stabilité sont donc : } tous les coefficients doivent être positifs
a_1	0	
$a_1 a_2$	0	

Équation du 3^e degré : $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$

a_0	a_2	Les conditions de stabilité sont donc : $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $a_2 > 0$; $a_3 > 0$; $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$
a_1	a_3	
$a_1 a_2 - a_0 a_3$	0	
$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3)$	0	
0		

Tous les coefficients doivent être positifs et en outre on doit avoir la relation supplémentaire :

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

■ **Équation du 4^e degré** : $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$

On obtient d'une façon analogue le résultat suivant :

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0;$$

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0$$

2.6.3.4 Cas où le critère de Routh est inapplicable

Il arrive que l'on ne puisse appliquer le critère de Routh, car on ne peut pas construire le tableau. C'est le cas lorsque l'on a une ligne de coefficients nuls comme dans l'équation bicarrée à racines complexes :

$$a_0 x^4 + a_2 x^2 + a_4 = 0$$

On pose alors $x^2 = X$:

$$a_0 X^2 + a_2 X + a_4 = 0$$

On démontre alors que les racines X doivent être réelles et négatives. On utilise la méthode classique basée sur le déterminant, la somme et le produit.

$$\Delta > 0; \quad S < 0; \quad P > 0$$

Exemple

Reprenons le cas du régulateur.

$$(2 ML^2 \sin^2 \theta^* + I) \overline{\psi}'' + 4 ML^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* \overline{\theta}' + K_2^* \overline{\theta} = 0$$

$$ML^2 \overline{\theta}'' + ML^2 (\psi'^{*2} \sin^2 \theta) \overline{\theta}$$

$$+ b^* L^2 \overline{\theta}' - 2 ML^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* \overline{\psi}' = 0$$

Posons $\overline{\psi} = A_1 e^{rt}$; $\overline{\theta} = A_2 e^{rt}$.

$$(I + 2 ML^2 \sin^2 \theta^*) r^2 A_1 + [4 ML^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* r + K_2^*] A_2 = 0$$

$$- 2 ML^2 (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* r A_1$$

$$+ [ML^2 r^2 + b^* L^2 r + ML^2 \psi'^{*2} \sin^2 \theta^*] A_2 = 0$$

$$I ML^2 r^4 + b^* L^2 I r^3 + [I ML^2 \psi'^{*2} \sin^2 \theta^*$$

$$+ 8 M^2 L^4 \psi'^{*2} \sin^2 \theta^* \cos^2 \theta^*] r^2$$

$$+ 2 ML^2 K_2^* (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* r = 0$$

Ici disparaît le terme en $2 ML^2 \sin^2 \theta$. En pratique $I \gg ML^2$.

$$r \{ I ML^2 r^3 + b^* L^2 I r^2 + I ML^2 \psi'^{*2} r \sin^2 \theta^* + 2 ML^2 K_2^* (\sin \theta^* \cos \theta^*) \psi'^* \} = 0$$

La solution $r = 0$ donne une solution particulière constante. Elle ne change rien à la stabilité qui dépend de la nature des racines de l'équation entre parenthèses du 3^e degré. Elle est du type :

$$a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0$$

Tous les coefficients doivent être positifs.

Cela est vrai si $K_2 > 0$ (le couple diminue si θ croît).

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad b^* I \sin \theta^* \psi'^* - 2 M K_2^* \cos \theta^* > 0$$

On voit qu'ici l'amortissement est absolument nécessaire.

2.7 Stabilité du système réel non linéaire. Théorème de Liapounov

Le théorème de Liapounov indique que, sous certaines conditions, les résultats valables pour le système linéarisé sont valables pour le système réel. Nous l'énoncerons sans démonstration.

Théorème : si toutes les racines de l'équation caractéristique du système linéarisé ont leur **partie réelle négative**, la position d'équilibre est **stable**. Si **une**, au moins, des racines de l'équation caractéristique du système linéarisé a sa **partie réelle positive**, la position d'équilibre est **instable**.

Dans le cas où aucune des racines n'a sa partie réelle positive et où l'une, au moins, a sa partie réelle nulle, on ne peut conclure directement. Il faut faire une étude spéciale. Cependant, on peut montrer que, dans ce cas, le système réel est stable si l'on peut écrire l'intégrale des forces vives.